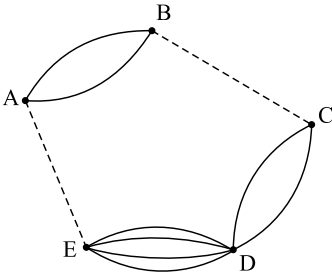


- ۱ تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به شهر E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد. (همه حالت‌های ممکن را بنویسید.)



- ۲ روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

(الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

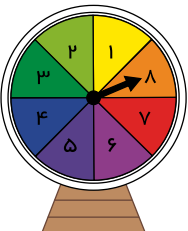
(ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

- ۳ انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آن‌ها به‌طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

(ب) نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

- ۴ در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آن‌ها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهاشان می‌کنند. بعد از مدتی محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آن‌ها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.



- ۵ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که: (الف)

عقربه روی یک عدد اول بایستد.

(ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

(پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

- ۶ از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) هر سه سیب سالم باشند.

(ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

(پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

- ۷ هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

(الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

(پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

(ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۸ مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است.

(الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟

(ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

(پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد؟

(ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه‌عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۹ با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی‌معنی)

(الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

(پ) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۱۰ برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص و گزارش شود.

۱۱ اندازه‌گیری نمونه و اندازه جامعه را تعریف کنید.

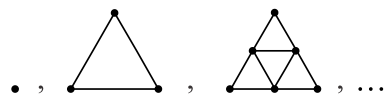
۱۲ جدول زیر را کامل کنید.

دنباله دو ضابطه‌ای	ضابطه دنباله	رابطه بازگشتی	جملات دنباله
\times			$5, 8, 11, 14, 17, \dots$
	\times		$4, 1, 4, 1, \dots$
	\times	\times	$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$
\times		\times	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

۱۳

جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ را برای هر کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟

(الف)



(ب)



۱۴

شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

(الف) $a_1 = 11$

(ب) $a_1 = 25$

۱۵ اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

(الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

(ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟



پاسخنامه تشریحی

۱ اگر از شهر B به شهر C ، راه و از شهر A به شهر E ، y راه داشته باشیم:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ یا $A \rightarrow E \rightarrow D$: تعداد مسیرها

$$\Rightarrow ۲۰ = ۲ \times x \times ۲ + y \times ۴$$

$$\Rightarrow ۲۰ = ۴x + ۴y \xrightarrow{\div ۴} \boxed{\Delta = x + y}$$

برای مقدار x و y حالت‌های زیر ممکن است:

$$x + y = \Delta \xrightarrow{x, y \in \mathbb{N}} \begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = ۴ \checkmark \\ x = ۲ \rightarrow y = ۳ \checkmark \\ x = ۳ \rightarrow y = ۲ \checkmark \\ x = ۴ \rightarrow y = ۱ \checkmark \\ x = ۵ \rightarrow y = ۰ \times \end{cases}$$

۲

الف) ۳ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(۱۲, ۳) = \frac{۱۲!}{۳! \times ۹!} = \frac{\cancel{۱۲} \times \cancel{۱۱} \times ۱۰}{\cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۱} = ۲۲۰$$

ب) ۲ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(۱۲, ۲) = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

۳

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times \cancel{۹} \times \cancel{۸}}{\cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۱} = ۱۲۰$$

الف) A پیشامد اینکه حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$$n(A) = \underbrace{\binom{۵}{۲} \times \binom{۵}{۱}}_{\text{دو نفر موافق و یک نفر غیر موافق}} + \underbrace{\binom{۵}{۳} \times \binom{۵}{۰}}_{\text{هر سه موافق}}$$

$$= ۱۰ \times ۵ + ۱۰ \times ۱ = ۶۰ \Rightarrow P(A) = \frac{۶۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

ب) B پیشامد اینکه نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشند.

$$n(B) = \underbrace{\binom{۵}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱}}_{\text{یک موافق، یک مخالف و یک متمنع}}$$

$$= ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰ \Rightarrow P(B) = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

۴

$$\begin{array}{c} \text{۵ نشان‌دار} \\ \text{۱۵ بدون نشانه} \end{array} \Rightarrow n(S) = \binom{۲۰}{۷} = \frac{۲۰ \times ۱۹ \times \cancel{۱۸} \times ۱۷ \times \cancel{۱۶} \times \cancel{۱۵} \times \cancel{۱۴}}{\cancel{۷} \times \cancel{۶} \times \cancel{۵} \times \cancel{۴} \times \cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۱} = ۷۷۵۲۰$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۵}{۲} \times \binom{۱۵}{۵}}_{\substack{\text{۲ نشان‌دار و ۵ بدون نشانه} \\ \text{۲ نشان‌دار و ۵ بدون نشانه}}} + \underbrace{\binom{۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۶}}_{\substack{\text{۱ نشان‌دار و ۶ بدون نشانه} \\ \text{۱ نشان‌دار و ۶ بدون نشانه}}} + \underbrace{\binom{۵}{۰} \times \binom{۱۵}{۷}}_{\substack{\text{۰ نشان‌دار و ۷ بدون نشانه} \\ \text{۰ نشان‌دار و ۷ بدون نشانه}}} \\ = ۱۰ \times ۳۰۰۳ + ۵ \times ۵۰۰۵ + ۱ \times ۶۴۳۵ = ۶۱۴۹۰$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۶۱۴۹۰}{۷۷۵۲۰} = \frac{۶۱۴۹}{۷۷۵۲}$$

۵

$$S = \{1, ۲, \dots, ۸\} \Rightarrow n(S) = ۸$$

الف) A پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد اول بایستد.

$$\text{الف) } A = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow \text{احتمال مطلوب: } P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب) B پیشامد اینکه یک عدد اول یا فرد نشان دهد.



$$\text{پ) } B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب } P(B) = \frac{5}{8}$$

پ) C پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد مضرب ۳ باشد.

$$\text{پ) } C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب } P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۶

الف) A پیشامد اینکه هر سه سیب سالم باشد.

$$n(S) = \binom{17}{3} = \frac{17 \times \cancel{16}^A \times \cancel{15}^5}{\cancel{3}^2 \times \cancel{2}} = 680$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{هر سه سالم}} = \frac{\cancel{12}^2 \times 11 \times 10}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 220 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{220}{680} = \frac{11}{34}$$

ب) B پیشامد اینکه دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

$$n(B) = \underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{دو سالم}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک لکه‌دار}} = \frac{\cancel{12}^6 \times 11}{\cancel{2}} \times 5 = 330 \Rightarrow P(B) = \frac{330}{680} = \frac{33}{68}$$

پ) C پیشامد اینکه تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیش‌تر باشد.

$$n(C) = C_2^{12} \times C_1^5 + C_3^{12} \times C_0^5 = \binom{12}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{12}{3} \times \binom{5}{0}$$

$$= 66 \times 5 + 220 = 550 \Rightarrow P(C) = \frac{550}{680} = \frac{55}{68}$$

۷

$$\text{الف) } S = \{1, 3, \dots, 19\}$$

$$\text{ب) } A = \{3, 9, 15\}$$

$$\text{پ) } B = \{1, 9\}$$

$$\text{ت) } A \cap B = \{9\} \quad , \quad A - B = \{3, 15\}$$

۸

۸ در بین مجموعه A ، ۴ رقم زوج داریم:

$$\text{الف) } \underbrace{(2)}_{\text{زوج}} \times \underbrace{(3)}_{\text{زوج}} \times \underbrace{(4)}_{\text{زوج}} \times \underbrace{(5)}_{\text{زوج}} \times \underbrace{(4)}_{\text{زوج}} = 480$$

اولین رقم سمت چپ ۸ یا ۹ باشد:

$$\text{ب) } \underbrace{(2)}_{\text{بدون تکرار ارقام}} = 240 \quad \underbrace{(2)}_{\text{یکان}} \times \underbrace{(5)}_{\text{صدگان}} \times \underbrace{(4)}_{\text{هزارگان}} \times \underbrace{(3)}_{\text{دهزارگان}} \times \underbrace{(2)}_{\text{یکان}} = 240$$

$$\text{با تکرار ارقام} \quad (2) \times (6) \times (6) \times (6) \times (6) = 7776$$

$$\text{پ) } C(6, 3) = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{\cancel{6}^3 \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 20$$

$$\text{ت) } C(5, 2) = C_2^5 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۹

تعداد حروف کلمه ولایت برابر ۵ (و - ل - ا - ی - ت) است؛ بنابراین:

$$\text{الف) } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$\text{ب) } \frac{3}{\text{ی}} \times \frac{4}{\text{ی}} \times \frac{1}{\text{ی}} = 12 \quad (\text{بدون تکرار})$$

$$\frac{5}{\text{ی}} \times \frac{5}{\text{ی}} \times \frac{1}{\text{ی}} = 25 \quad (\text{با تکرار})$$

$$\text{پ) } \frac{1}{\text{و}} \times \frac{3}{\text{و}} \times \frac{2}{\text{و}} \times \frac{1}{\text{و}} \times \frac{1}{\text{و}} = 6 \quad (\text{بدون تکرار})$$

$$\frac{1}{\text{و}} \times \frac{5}{\text{و}} \times \frac{5}{\text{و}} \times \frac{5}{\text{و}} \times \frac{1}{\text{و}} = 125 \quad (\text{با تکرار})$$

۱۰ مرکزی - پراکندگی

۱۱ تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه و تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه می‌نامند.



۱۲

دنباله دو ضابطه‌ای	ضابطه دنباله	رابطه بازگشتی	جملات دنباله
\times	$a_n = 3n + 2$	$a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 5$	۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...
$a_n = \begin{cases} 4 & n \text{ فرد} \\ 1 & n \text{ زوج} \end{cases}$	\times	$a_{n+1} = a_n + 3(-1)^n$ $a_1 = 4$	۴, ۱, ۴, ۱, ...
$a_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$	\times	\times	$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$
\times	$a_n = \frac{n}{n+1}$	\times	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

۱۳ جملات هریک از دنباله‌ها که برابر با رأس الگوهاست را می‌نویسیم:

(الف) $a_1 = 1$ و $a_7 = 3$ و $a_9 = 6$ (ب) $a_1 = 1$ و $a_7 = 4$ و $a_9 = 9$

حال جملات دنباله بازگشتی صورت سؤال را نوشته و با موارد «الف» و «ب» مقایسه می‌کنیم.

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) \quad \text{و} \quad a_1 = 1$$

$$a_7 = a_{1+1} = a_1 + (1+1) = 1 + (2) = 3$$

$$a_9 = a_{7+1} = a_7 + (7+1) = 3 + (8) = 11$$

پس الگوی مورد نظر الگوی «الف» می‌باشد.

۱۴ (الف)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$a_1 = 11$$

$$\xrightarrow{n=1} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=11} a_2 = 3(11) + 1 = 34$$

$$\xrightarrow{n=2} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=34} a_3 = \frac{1}{2}(34) = 17$$

$$\xrightarrow{n=3} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=17} a_4 = 3(17) + 1 = 52$$

$$\xrightarrow{n=4} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=52} a_5 = \frac{1}{2}(52) = 26$$

$$\xrightarrow{n=5} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=26} a_6 = 3(26) + 1 = 79$$

(ب)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$a_1 = 25$$

$$\xrightarrow{n=1} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=25} a_2 = 3(25) + 1 = 76$$

$$\xrightarrow{n=2} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=76} a_3 = \frac{1}{2}(76) = 38$$

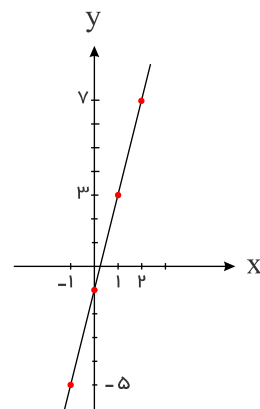
$$\xrightarrow{n=3} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=38} a_4 = 3(38) + 1 = 115$$

$$\xrightarrow{n=4} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=115} a_5 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$$

$$\xrightarrow{n=5} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=\frac{115}{2}} a_6 = 3\left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{347}{2}$$

۱۵ (الف) برای رسم نمودار تابع که دامنه‌اش \mathbb{R} است، داریم:

$$y = 4x - 1 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -5 & -1 & 3 \end{array}$$



با در نظر گرفتن آن‌که دامنهٔ دنباله \mathbb{N} است، تنها نقاط قرمز رنگ نمودار دنباله است.

(ب) رابطهٔ بازگشتی از مقایسهٔ دو جملهٔ متوالی حاصل می‌شود:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 3$$

$$f(1) - f(0) = 3 - (-1) = 4$$

$$a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{نمایش بازگشتی} \quad , \quad a_n = 4n - 1 \quad \text{نمایش تابعی دنباله}$$

شیب خط عددی است که با افزودن آن به جملهٔ قبلی، جملهٔ بعدی پدید می‌آید.